

Conférence mathémagique

J.-B. Aubin

INSA Lyon - ICJ

8 mars 2023

Présentation des tours mathémagiques

- Tour de la table de 142 857 **
- Tour de l'écriture décimale de p/q ***
- Tour de la factorisation éclair *
- Tour du Stegosaurus **
- Tour bonus ?

Tour de la table de 142 857

Vous connaissez vos tables de multiplication ? Je vous propose d'apprendre la table de 142 857.

Donnez-moi un nombre entre 1 et 100 et je le multiplierai mentalement en quelques secondes par 142 857.

À VOUS !

Tour de l'écriture décimale de p/q

Déterminons p et q de la manière suivante :

1	3	5	7	9	11	13	15	17
0	2	4	6	8	10	12	14	16

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

- 1 Sommer 2 nombres *sur la même ligne* du numérateur.
- 2 Sommer 4 nombres du dénominateur tels qu'il n'y en ait qu'un sur chaque ligne et chaque colonne.

Bon et mauvais choix :

Mauvais choix 1 :

1	3	5	7	9
2	4	6	8	0

Mauvais choix 2 :

1	3	5	7	9
2	4	6	8	0

Bon choix 3 :

1	3	5	7	9
2	4	6	8	0

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Pour le choix 3, la fraction vaut alors $\frac{1+5}{1+5+10+16}$. À VOUS !

Tour de la factorisation éclair

37 est un nombre fameux.

Procédons maintenant à la factorisation d'un nombre à 6 chiffres *abc def*. Pour cela, donnez-moi un nombre à 3 chiffres (différents si possible) et complétons pour obtenir un nombre à 6 chiffres.

Tour du Stegosaurus

Tour en 3 étapes:

- Choisir un mot dans une liste,
- Pour chaque lettre du mot, indiquer si elle appartient à un ensemble de lettres donné,
- Retrouver le mot dans la liste.

Étape 1: Choix du mot dans la liste

1 kayak

9 bilan

17 canut

25 géant

2 balai

10 fétus

18 canoë

26 école

3 butin

11 bravo

19 jouet

27 cruel

4 flash

12 kiwis

20 elfes

28 heure

5 karma

13 appat

21 haiku

29 vegan

6 alibi

14 frite

22 carte

30 jesus

7 flirt

15 bidet

23 doigt

31 dépit

8 athée

16 fesse

24 index

32 chips

Étape 2-1: la première lettre du mot appartient-elle à l'ensemble de droite ?

Y L K
 M T
W Q
 U F A
B O N

X S P
 I V
J Z G
 E C D
 R H

Étape 2-2: la seconde lettre du mot appartient-elle à l'ensemble du bas ?

Y L K
 M T
W Q
 U F A
B O N

X S P
 I V
J Z G
 E C D
 R H

Étape 2-3: la troisième lettre du mot appartient-elle à l'ensemble de droite ?

Y L K
 M T
W Q
 U F A
B O N

X S P
 I V
J Z G
 E C D
 R H

Étape 2-4: la quatrième lettre du mot appartient-elle à l'ensemble du bas ?

Y L K
 M T
W Q
 U F A
B O N

X S P
 I V
J Z G
 E C D
 R H

Étape 2-5: la cinquième lettre du mot appartient-elle à l'ensemble du bas ?

Y L K
 M T
W Q
 U F A
B O N

X S P
 I V
J Z G
 E C D
 R H

Étape 3: Retour à la liste

0 kayak

1 balai

2 butin

3 flash

4 karma

5 alibi

6 flirt

7 athée

8 bilan

9 fétus

10 bravo

11 kiwis

12 appat

13 frite

14 bidet

15 fesse

16 canut

17 canoë

18 jouet

19 elfes

20 haiku

21 carte

22 doigt

23 index

24 géant

25 école

26 cruel

27 heure

28 vegan

29 jesus

30 dépit

31 chips

Plan

- 1 De l'écriture décimale
 - Quelques rappels
 - Explications des tours sur la table de 142 857 et l'écriture décimale de p/q
- 2 Des critères de divisibilité
 - Quelques rappels
 - Explication du tour sur la factorisation éclair
- 3 Des bases
 - Quelques rappels
 - Explication du Stegosaurus

Cas particulier des rationnels p/q

Propriété 1

Les rationnels ont une écriture décimale périodique à partir d'un certain rang.

Exemples / contreexemples :

- $1/3 = 0,3333\dots$ est périodique de période "3", de longueur 1,
- $1/4 = 0,25$ est périodique à partir du troisième chiffre après la virgule de période "0", de longueur 1.
- $1/99 = 0,01010101\dots$ est périodique de période "01", de longueur 2.
- π ou e par exemple ne vérifient pas cette propriété...

Cas encore plus particulier des rationnels $1/p$

Propriété 2

Les rationnels de la forme $1/p$ ont une écriture décimale périodique dont la longueur de la période est inférieure ou égale à $p-1$.

Propriété 3

Les entiers p tels que $1/p$ ait une période égale à $p-1$ sont des nombres premiers dits **longs**.

Exemples : les deux plus petits nombres premiers longs sont 7 et 17. En effet,

$$\frac{1}{7} = 0,142857142857\dots$$

(période de longueur $6=7-1$) et

$$\frac{1}{17} = 0,05882352941176470588235294117647\dots$$

(période de longueur $16=17-1$).

La “cyclicité” étonnante des périodes

$$1 \times 142\,857 = 142857$$

$$2 \times 142\,857 = 285714$$

$$3 \times 142\,857 = 428571$$

Pour la période de $1/7$:

$$4 \times 142\,857 = 571428$$

$$5 \times 142\,857 = 714285$$

$$6 \times 142\,857 = 857142$$

$$7 \times 142\,857 = 999999$$

De même pour la période de $1/17$:

$$1 \times 0588235294117647 = 0588235294117647$$

$$2 \times 0588235294117647 = 1176470588235294$$

$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$

$$16 \times 0588235294117647 = 9411764705882352$$

$$17 \times 0588235294117647 = 9999999999999999$$

La “complémentarité” étonnante des périodes

Pour la période de $1/7$, 142857 :

$$1 + 8 = 9$$

$$4 + 5 = 9$$

$$2 + 7 = 9$$

$$14 + 28 + 57 = 99$$

$$142 + 857 = 999$$

De même pour la période de $1/17$, 0588235294117647. :

$$05 + 88 + 23 + 52 + 94 + 11 + 76 + 47 = 4 \times 99$$

$$0588 + 2352 + 9411 + 7647 = 2 \times 9999$$

$$05882352 + 94117647 = 99999999$$

N.B.: il suffit de retenir la moitié de la période !

Plan

- 1 De l'écriture décimale
 - Quelques rappels
 - Explications des tours sur la table de 142 857 et l'écriture décimale de p/q
- 2 Des critères de divisibilité
 - Quelques rappels
 - Explication du tour sur la factorisation éclair
- 3 Des bases
 - Quelques rappels
 - Explication du Stegosaurus

Table de 142 857: Explications 1/2

Rappel du tour : Calcul de $142\,857 \times N$ où $N < 100$.

Première étape : division euclidienne de N par 7

Trouver (q,r) tel que $N = 7q + r$ avec $0 \leq r \leq 6$ donc

$$142\,857 \times N = 142\,857 \times (7q + r) = q \times (7 \times 142\,857) + (r \times 142\,857)$$

Exemple : Pour calculer $142\,857 \times 17$, le magicien remarque que $17 = 7 \times 2 + 3$ et en déduit que

$$142\,857 \times 17 = 2 \times (7 \times 142\,857) + 3 \times 142\,857$$

Explications 2/2

Seconde étape : Propriétés de 142 857

142 857 est cyclique et $142\,857 \times 7 = 999\,999$.

Exemple :

$$142\,857 \times 17 = 2 \times (7 \times 142\,857) + 3 \times 142\,857$$

- $2 \times (7 \times 142\,857) = 2\,000\,000 - 2$.
- $3 \times 142\,857 = 428\,571$ (voir astuce page suivante).

Donc $142\,857 \times 17 = 2\,000\,000 - 2 + 428\,571 = 2\,428\,569$
(attention à ne pas oublier de retrancher $q = 2$ de $2\,428\,571$!).

Dernière petite astuce

Le produit de 142 857 par un nombre i entre 1 et 6 est le nombre de six chiffres dont

- le premier chiffre est le i -ème plus petit chiffre de 142 857
- la suite des chiffres est la même que dans 142 857 (en revenant si besoin au début –à 1– après le dernier chiffre –le 7–)

Exemple : $142\,857 \times 3 = 428\,571$ (on part du 3^e plus petit chiffre de 142 857, donc 4, et poursuit sur six chiffres: 428 571)

Rappel du tour de l'écriture décimale de p/q

1	3	5	7	9	11	13	15	17
0	2	4	6	8	10	12	14	16

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

- 1 Sommer 2 nombres *sur la même ligne* du numérateur.
- 2 Sommer 4 nombres du dénominateur tels qu'il n'y en ait qu'un sur chaque ligne et chaque colonne.

Écriture décimale de p/q : Explications 1/3

- **Aspect “magique”** : la matrice au dénominateur est appelée *matrice de forçage* ; quel que soit votre choix, la somme des nombres sélectionnés sera 34 (preuve laissée à l'auditoire).
- **Aspect mathématique** : le choix sur la même ligne au numérateur implique une somme paire, qui se simplifiera avec le dénominateur pour donner **une fraction de la forme $n/17$** où $1 \leq n \leq 16$

Mais comment donner l'écriture décimale de $n/17$?

Écriture décimale de p/q : Explications 2/3

Détermination des 2 premiers chiffres après la virgule

- Si $n \leq 8$, les deux premiers chiffres sont $6 \times n - 1$
- Si $n > 8$, les deux premiers chiffres sont $6 \times n - 2$

Exemples :

- les deux premiers chiffres après la virgule de $2/17$ sont **1** et **1**
(car **11** = $6 \times 2 - 1$),
- les deux premiers chiffres après la virgule de $11/17$ sont **6** et **4**
(car **64** = $6 \times 11 - 2$).

Écriture décimale de p/q : Explications 3/3

Utilisation de la cyclicité de la période

Il ne reste qu'à retrouver les 2 chiffres dans la période de $1/17$ et de poursuivre aussi loin que souhaité.

Exemples : Dans 0588235294**11**7**64**7, on repère **11** (resp. **64**) et on écrit

- $2/17 = 0, \text{117647058823529411764...}$
- (resp. $11/17 = 0, \text{647058823529411764705...}$)

N.B. : Astuce pour retrouver plus vite les 2 chiffres : 0, 2, 3, 5 et 8 sont dans la première moitié de la période, 9, 7, 6, 4, et 1 dans la seconde.

Plan

- 1 De l'écriture décimale
 - Quelques rappels
 - Explications des tours sur la table de 142 857 et l'écriture décimale de p/q
- 2 Des critères de divisibilité
 - Quelques rappels
 - Explication du tour sur la factorisation éclair
- 3 Des bases
 - Quelques rappels
 - Explication du Stegosaurus

des plus connus...

Considérons le nombre $A = \sum_{i=0}^m a_i 10^i$

n	Critère de divisibilité de A par n
2	a_0 pair
3	$\sum_{i=0}^m a_i$ divisible par 3
5	$a_0 = 0$ ou $a_0 = 5$
9	$\sum_{i=0}^m a_i$ divisible par 9
11	$\sum_{i=0}^m (-1)^i a_i$ divisible par 11

...aux plus exotiques

n	Critère de divisibilité de A par n
$d9$	$\sum_{i=1}^m a_i 10^{i-1} + (d+1) \times a_0$ divisible par $d9$
$d1$	$\sum_{i=1}^m a_i 10^{i-1} - d \times a_0$ divisible par $d1$

Note : On retrouve les critères de divisibilité par 9 et 11.

Exemple : 961 est-il divisible par 19 ? par 31 ?

- $96 + 2 \times 1 = 98$ et $9 + 2 \times 8 = 25$.
25 n'est pas divisible par 19 donc 961 non plus.
- $96 - 3 \times 1 = 93$ et $9 - 3 \times 3 = 0$ donc 961 est divisible par 31.

N.B. : méthode très connue dans les mathématiques védiques par exemple (pas seulement).

Quelques astuces... parmi une infinité

$$1001 = 7 \times 11 \times 13$$

$$10\,001 = 73 \times 137$$

$$999 = 27 \times 37$$

Exemple 1 : un nombre de la forme $abc\,abc$ sera toujours divisible par 7, 11 et 13.

Exemple 2 : un nombre de la forme $ab\,cda\,bcd$ sera toujours divisible par 73 et 137.

Plan

- 1 De l'écriture décimale
 - Quelques rappels
 - Explications des tours sur la table de 142 857 et l'écriture décimale de p/q
- 2 Des critères de divisibilité
 - Quelques rappels
 - Explication du tour sur la factorisation éclair
- 3 Des bases
 - Quelques rappels
 - Explication du Stegosaurus

Factorisation éclair : Explication 1/2

La façon de compléter le nombre $abc\,def$ est capitale : il vérifie $a + d = b + e = c + f = 9$.

Ce nombre ne peut qu'être un multiple de 999 (c'est-à-dire que un nombre de la forme $999 \times n$).

Calcul littéral :

$$\begin{array}{r}
 \times \qquad \qquad \qquad a \qquad \qquad b \qquad \qquad c \\
 \qquad \qquad \qquad 9 \qquad \qquad 9 \qquad \qquad 9 \\
 \hline
 a \quad b \quad d \quad (9-a) \quad (9-b) \quad (9-d)
 \end{array}
 \qquad \text{avec } d = c - 1.$$

Exemple : $684 \times 999 = 683\,316$:

$$\begin{array}{r}
 \times \qquad \qquad \qquad 6 \qquad \qquad 8 \qquad \qquad 4 \\
 \qquad \qquad \qquad 9 \qquad \qquad 9 \qquad \qquad 9 \\
 \hline
 6 \quad 8 \quad 3 \quad (9-6) \quad (9-8) \quad (9-3)
 \end{array}
 \qquad \text{avec } 3 = 4 - 1.$$

Factorisation éclair : Explication 2/2

- Le magicien observe les 3 premiers chiffres du nombre à 6 chiffres initial, et ajoute 1,
- Le nombre à 3 chiffres trouvé ainsi que 27 et 37 (toujours) divisent le nombre à 6 chiffres soumis.

Exemple : puisque $684 \times 999 = 683\,316$ et $999 = 27 \times 37$, alors $683\,316 = 684 \times 27 \times 37$.

Raffinement ultime : Commencez par demander la vérification que 37 (ou 27) divise bien le nombre, cela vous laissera un peu de temps pour (essayer de) décomposer le nombre à 3 chiffres en facteurs premiers !

Plan

- 1 De l'écriture décimale
 - Quelques rappels
 - Explications des tours sur la table de 142 857 et l'écriture décimale de p/q
- 2 Des critères de divisibilité
 - Quelques rappels
 - Explication du tour sur la factorisation éclair
- 3 Des bases
 - Quelques rappels
 - Explication du Stegosaurus

Rappels sur la base 2

- **Qu'est ce ?** C'est un moyen utilisé notamment en informatique pour représenter les nombres avec les deux symboles 0 et 1.
- **Comment fait-on ?** On somme des puissances de 2. Chaque 1 (resp. 0) en i -ième position en partant de la droite indique la présence (resp. l'absence) de 2^{i-1} dans la somme.
- **Exemple :** En base 2,
 $11010 = 1 \times 2^{5-1} + 1 \times 2^{4-1} + 0 \times 2^{3-1} + 1 \times 2^{2-1} + 0 \times 2^{1-1}$
donc, en base 2, $11010 = 16 + 8 + 2 = 26$.

Plan

- 1 De l'écriture décimale
 - Quelques rappels
 - Explications des tours sur la table de 142 857 et l'écriture décimale de p/q
- 2 Des critères de divisibilité
 - Quelques rappels
 - Explication du tour sur la factorisation éclair
- 3 Des bases
 - Quelques rappels
 - Explication du Stegosaurus

Tour du Stegosaurus

Rappel du tour:

- Choisir un mot dans une liste,
- Pour chaque lettre du mot, indiquer si elle appartient à un ensemble de lettres donné,
- Retrouver le mot dans la liste.

Étape 1: Choix du mot dans la liste

0 kayak

1 balai

2 butin

3 flash

4 karma

5 alibi

6 flirt

7 athée

8 bilan

9 fétus

10 bravo

11 kiwis

12 appat

13 frite

14 bidet

15 fesse

16 canut

17 canoë

18 jouet

19 elfes

20 haiku

21 carte

22 doigt

23 index

24 géant

25 école

26 cruel

27 heure

28 vegan

29 jesus

30 dépit

31 chips

Explications

- Chaque mot de la liste est numéroté de 0 à 31.
- Il n'y a que deux types de cartes "lettres", l'une vaut 1 et l'autre 0.
- Une fois que le spectateur a répondu aux 5 questions, il a créé un nombre en base 2.

Exemple : les 5 réponses "non", "non", "oui", "non", "oui" correspondent au nombre 11010. Le nombre associé est donc 11010 ce qui vaut 26 en base 2 : le mot numéroté 26 de la liste proposé initialement est CRUEL. C'est le mot choisi !

Conclusion

- L'étonnement est un bon moteur,
- Dès qu'une propriété étonnante apparaît en math, un tour potentiel aussi,
- Penser toujours à faire un "pas de côté" !

À VOUS DE JOUER !

Bibliographie pour aller plus loin

- Gardner, M. (1956), Mathematics, magic and mystery éd. Dover
- Lamoitier, J.-P. (2012), Arithmétique classique, éd. ellipses
- Souder, D. (2016) Maths et magiques : Niveaux Collège et Lycée, éd. SOS éducation
- Souder, D. et Souder P. (2010), Magic Mathieu compte en moins de 2 !, éd. Belin